

Matemática financeira: juros compostos

Financial mathematics: compound interest

Recebido: 11/07/2020 | Aceito: 12/09/2020 | Publicado: 20/12/2020

José Bonifácio de Araújo Júnior¹

Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-8096-5790>

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9529180580062988>

Faculdade Processus, DF, Brasil

E-mail: bonifacio@institutoprocessus.com.br

Resumo

Neste artigo foi explicada a lógica dos Juros Compostos. Inicialmente foram deduzidas as fórmulas e em seguida diversos exemplos numéricos foram apresentados de cálculo dos juros compostos. Além disso, foram apresentados alguns exemplos numéricos de cálculos na calculadora financeira HP 12 C e no Excel.

Palavras-chave: Juros simples. Capitalização de Juros sobre juros.

Abstract

This article explains the Compound Interest logic. Initially the formulas were deduced and then several numerical examples were presented for calculating compound interest. In addition, some numerical examples of calculations in the HP 12 C financial calculator and in Excel were presented.

Keywords: Compound Interest. Capitalization of Interest on Interest.

Introdução

Os juros compostos seguem uma função exponencial e não linear como ocorre nos juros simples. Nos juros simples a taxa de juros é sempre aplicada sobre o capital inicial, não havendo, portanto, a capitalização de juros sobre juros.

Nos juros compostos, a taxa de juros é sempre aplicada sobre o montante (capital + juros) acumulado do período anterior. Assim a taxa incide sempre sobre um montante, havendo, portanto, a capitalização de juros sobre juros.

Juros Compostos

No regime de juros simples, a taxa de juros (i) é sempre aplicada sobre o Montante do período anterior, portanto, ocorre capitalização de juros sobre juros. Para se obter a fórmula do Montante (C) com juros compostos, fazemos:

¹ Doutor em Ciências Contábeis pela Universidade de Brasília (UnB), Mestre em Ciências Contábeis pela Universidade de Brasília (UnB), Bacharel em Ciências Contábeis pela Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), Bacharel em Administração pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Brasília (UCB). Atualmente é professor titular da Faculdade Processus.



$$M_1 = C + C \cdot i = C(1 + i)$$

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$$

⋮

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-1} \cdot i = M_{n-1}(1 + i) = C(1 + i)^{n-1}(1 + i) = C(1 + i)^n$$

Ou simplesmente:

$$M = C(1 + i)^n$$

A partir dessa fórmula, é possível obter todas as demais, isto é, para o Capital (C), a Taxa (i) e o Prazo(n):

$$M = C(1 + i)^n \rightarrow C = \frac{M}{(1 + i)^n}$$

$$M = C(1 + i)^n \rightarrow M/C = (1 + i)^n \rightarrow \sqrt[n]{M/C} = 1 + i \rightarrow i = (M/C)^{1/n} - 1$$

$$M = C(1 + i)^n \rightarrow M/C = (1 + i)^n \rightarrow \ln M/C = \ln(1 + i)^n \rightarrow n = \frac{\ln M/C}{\ln 1 + i}$$

No regime de juros compostos, os juros são capitalizados produzindo juros sobre juros periodicamente. É o regime mais comum no sistema financeiro e por isso o mais útil para cálculos do dia-dia.

Para dedução das fórmulas dos juros compostos, serão utilizados os mesmos dados do exemplo utilizado para deduzir as fórmulas dos juros simples conforme demonstra-se a seguir.

Exemplo 01: Um capital de 1.000 aplicado por um período de 3 meses a uma taxa de 10% ao mês, juros compostos, produz os seguintes montantes a cada período:

$$M_1 \text{ (Montante do 1º período)} = 1.000 + 1.000(0,1) = 1.000 (1+0,1)$$

$$M_2 \text{ (Montante do 2º período)} = M_1 + M_1 (0,1) = M_1 (1+0,1) =$$

$$[1.000 (1+0,1)] (1+0,1) = 1.000 (1+0,1)^2$$

$$M_3 \text{ (Montante do 3º período)} = M_2 + M_2(0,1) = M_2 (1+0,1) =$$

$$[1.000 (1+0,1)^2] (1+0,1) = 1.000 (1+0,1)^3$$

Por dedução, temos:

$$M_{20} = 1.000 (1+0,1)^{20}$$



Generalizando, temos:

$$M = C(1 + i)^n$$

Onde: M = Montante; C = Capital;

i = taxa e n = prazo.

Utilizando um pouco de álgebra, é possível se obter as fórmulas do juro, do capital, da taxa e do número de períodos para o regime composto de capitalização, isto é:

a) Capital (C)

$$M = C(1 + i)^n \Rightarrow \frac{M}{(1 + i)^n} = C \Rightarrow C = \frac{M}{(1 + i)^n}$$

b) Taxa (i)

$$M = C(1 + i)^n \Rightarrow \frac{M}{C} = (1 + i)^n \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{M}{C}} = 1 + i \Rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1 \text{ ou } i = \left(\frac{M}{C}\right)^{1/n} - 1$$

c) Prazo(n)

$$M = C(1 + i)^n \Rightarrow \frac{M}{C} = (1 + i)^n \Rightarrow \ln\left(\frac{M}{C}\right) = \ln(1 + i)^n \Rightarrow \ln\left(\frac{M}{C}\right) = n \cdot \ln(1 + i) \Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1 + i)}$$

d) Juros (J)

$$J = M - C = C(1 + i)^n - C \Rightarrow C[(1 + i)^n - 1]$$

Exemplo 02: Calcular o montante de um capital de R\$ 5.000 aplicado à taxa de 4% a.m. durante 5 meses.

Solução:

$$M = C(1 + i)^n$$

$$M = 5.000(1 + 0,04)^5 = 6.083,26$$

Na hp: 5000 chs pv 4 i 5 n FV

No Excel:

	A	B
1	Capital	5000
2	Taxa	0,04
3	Prazo	5
4	Montante	=VF(B2;B3;;-B1)



Exemplo 03: No final de 24 meses você deverá efetuar um pagamento de R\$ 2.000 referente a um empréstimo contratado hoje mais os juros devidos a uma taxa de 4% a.m. Qual o valor tomado emprestado?

Solução:

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} \rightarrow C = \frac{2.000}{(1+0,04)^{24}} = 780,24$$

Na hp: 2000 chs FV 4 i 24 n PV

No Excel:

	A	B
1	Montante	2000
2	Taxa	0,04
3	Prazo	24
4	Capital	=VP(B2:B3;,-B1)

Exemplo 04: Em que prazo um empréstimo de R\$ 24.278,43 pode ser liquidado em um único pagamento de R\$ 41.524,33, sabendo-se que a taxa contratada é de 3% ao mês?

Solução:

$$n = \frac{\ln(M / C)}{\ln(1 + i)} = \frac{\ln(41.524,33 / 24.278,43)}{\ln(1 + 0,03)} = \frac{\ln(1,7103)}{\ln(1,03)} = 18,157$$

Na hp: 41524.33 chs fv 24278.43 pv 3 i n

No Excel:

	A	B
1	Montante	41524,33
2	Capital	24278,43
3	Taxa	0,03
4	Prazo	=NPER(B3;B2;-B1)

Exemplo 05: Certa loja financia a venda de uma máquina no valor de R\$ 10.210,72, sem entrada, para pagamento em uma única prestação de R\$ 14.520,68 no final de 276 dias. Qual a taxa diária cobrada pela loja?

Solução:

$$i = \sqrt[276]{M / C} - 1 = \sqrt[276]{14.520,68 / 10.210,72} - 1 = 0,13\%$$

Na hp: 14.520,68 chs fv 10.210,72 pv 276 n i

No Excel:

	A	B
1	Montante	14520,68
2	Capital	10210,72
3	Prazo	276
4	Taxa	=TAXA(B3;B2;-B1)



Exemplo 06: Calcular os juros sobre um capital de R\$1.000 aplicado pelo prazo de 5 meses a uma taxa de 10% ao mês.

Solução:

$$J = C[(1 + i)^n - 1]$$

$$J = 1.000[(1 + 0,1)^5 - 1] = 610,51$$

Na hp: 1000 pv 10 i 5 n fv rcl pv +

No Excel:

	A	B
1	Capital	1000
2	Taxa	0,1
3	Prazo	5
4	Juros	=VF(B2;B3;;-B1)-B1

Exemplo 26: determinar o montante de uma aplicação de R\$13.500 negociada a uma taxa de 25% ao ano, para um período de 92 dias pelo regime de juros compostos.

Solução:

$$M = 13.500 (1+0,25)^{92/360} = 14.292,22$$

Na hp: sto eex 13500 chs pv 25 i 92 enter 360 ÷ n fv

No Excel:

	A	B
1	Capital	13500
2	Taxa	0,25
3	Prazo	=92/360
4	Montante	=VF(B2;B3;;-B1)

Considerações Finais

Neste artigo foi explicada a lógica dos juros compostos. Inicialmente foram deduzidas as fórmulas de juros compostos e em seguida diversos exemplos numéricos foram apresentados de cálculo dos juros compostos.

Sugere-se, para trabalhos futuros, a apresentação e discussão dos conceitos de operações com taxas de juros, descontos e séries de pagamentos, com demonstração das fórmulas e também com exemplos numéricos de cálculo.

**Referências**

ASSAF NETO, Alexandre. Matemática financeira e suas aplicações. São Paulo: Atlas, 2008.

BRANCO, Anísio C. Castelo. Matemática Financeira Aplicada: Método Algébrico, HP-12C, Excel. 2. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2005.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. Matemática Financeira. 4ed. São Paulo: Atlas, 2004.