ISSN: 2675-6595

ARTIGO

Revista Processus Multidisciplinar

Página da revista:
https://periodicos.processus.com.br/index.php/multi/index

Uma breve revisão de matemática financeira

A brief review of financial mathematics

ARK: 44123/multi.v6i11.1374

Recebido: 19/02/2025 | Aceito: 14/03/2025 | Publicado *on-line*: 17/03/2025

José Bonifácio de Araújo Júnior[1]
https://orcid.org/0000-0001-8096-5790
http://lattes.cnpq.br/9529180580062988
UniProcessus – Centro Universitário Processus, DF, Brasil
E-mail: bonifacio@institutoprocessus.com.br

Check for updates

Resumo
Este artigo apresenta uma análise aprofundada de juros compostos, taxa efetiva, capitalização contínua e anuidades. São exploradas as principais fórmulas matemáticas, suas derivações e aplicações práticas em investimentos e financiamentos. Por meio de exemplos numéricos, demonstra-se como esses conceitos influenciam o crescimento dos investimentos e a eficiência dos financiamentos, destacando sua relevância na gestão financeira e na tomada de decisões estratégicas.

Palavras-chave: Juros Compostos; Taxa Efetiva; Capitalização Contínua; Séries de Amortamento; Anuidades; Finanças; Investimentos; Matemática Financeira.

Abstract
This article provides an in-depth analysis of compound interest, effective interest rate, continuous compounding and annuities. It explores the fundamental mathematical formulas, their derivations, and practical applications in investment and financing scenarios. Through numerical examples, the study demonstrates how these concepts affect investment growth and financing efficiency, highlighting their importance in financial management and strategic decision-making.

Keywords: *Compound Interest; Effective Rate; Continuous Compounding; Amortization Schedules; Annuities; Finance; Investments; Financial Mathematics.*

[1] Doutor e Mestre em Ciências Contábeis pela Universidade de Brasília (UnB), Bacharel em Ciências Contábeis pela Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), Bacharel em Administração pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Brasília (UCB).

1. Introdução

A compreensão dos conceitos de matemática financeira é fundamental para a análise e tomada de decisões em investimentos e financiamentos. Este artigo explora de forma aprofundada temas centrais como juros compostos, taxa efetiva, capitalização contínua, séries de pagamento e anuidades, que são essenciais para entender a evolução dos valores ao longo do tempo e para avaliar alternativas de aplicação de recursos.

Neste trabalho, são apresentadas as fórmulas matemáticas que sustentam cada um desses tópicos, bem como suas derivações e aplicações práticas por meio de exemplos numéricos. Dessa forma, o artigo fornece subsídios para investidores e gestores financeiros, possibilitando decisões estratégicas embasadas em análises quantitativas rigorosas.

O objetivo é oferecer uma visão integrada dos mecanismos que regem o crescimento dos investimentos e o financiamento de operações, contribuindo para o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda da dinâmica financeira.

2. Juros Compostos

Os juros compostos desempenham um papel fundamental nas finanças, influenciando decisões de investimento, financiamentos e análises econômicas. Diferentemente dos juros simples, onde os rendimentos são calculados apenas sobre o capital inicial, os juros compostos permitem que os juros acumulados sejam reinvestidos, resultando em um crescimento exponencial do montante ao longo do tempo.

A compreensão dos juros compostos é essencial para tomar decisões financeiras informadas. Planejamentos de longo prazo, como aposentadoria e investimentos em renda fixa, são significativamente impactados pela taxa de juros e pela frequência de capitalização.

Os juros compostos são um dos conceitos mais poderosos das finanças, desempenhando um papel crucial na acumulação de riqueza e na gestão de financiamentos. Seu efeito exponencial ressalta a importância de compreender as taxas de juros e os períodos de capitalização, sendo um tema central para investidores, economistas e gestores financeiros.

A fórmula dos juros compostos pode ser deduzida considerando a maneira como os juros se acumulam ao longo do tempo.

Seja C o capital inicial e i a taxa de juros por período. No primeiro período, o capital cresce para:

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{C} \cdot (1 + \mathrm{i})$$

No segundo período, os juros são aplicados ao novo montante:

$$C_2 = C_1 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2$$

Generalizando para *n* períodos, temos:

$$C_n = C \cdot (1 + i)^n$$

Assim, a fórmula dos juros compostos é:

$$M = C\ (1 + i)^n$$

Onde:
M = montante final,
C = capital inicial,
i = taxa de juros por período,
n = número de períodos.

Enquanto os juros simples são calculados apenas sobre o capital inicial, os juros compostos reinvestem os juros acumulados. Esse efeito multiplicador faz com que a diferença entre os dois métodos se torne mais significativa com o passar do tempo.

Exemplo numérico:
Um investimento de R$1.000 a uma taxa de 10% ao ano resultará em:

Juros simples após 3 anos:

$$M = C(1 + in) = 1.000\ (1 + 0{,}1 \cdot 3) = 1.300$$

Juros compostos após 3 anos:

$$M = C\ (1 + i)^n$$

$$M = 1.000\ (1\ +\ 0{,}1)^3 \approx 1.331$$

Exemplo numérico:
Calcular o capital necessário para produzir um montante de 1.000, em um período de 12 meses, com uma taxa de 1% ao mês.

$$M = C(1 + i)^n$$
$$1000 = \mathrm{C}(1 + 0{,}01)^{12}$$
$$1000 = C\ \cdot 1{,}01^{12}$$
$$1000\ \approx \mathrm{C}\ \cdot 1{,}1268$$
$$\frac{1000}{1{,}1268} \approx C$$
$$C\ \approx 887{,}47$$

Exemplo numérico:
Qual a taxa mensal necessária para triplicar um capital de 1.000 em 2 anos?

$$M = C(1 + i)^n$$
$$3000 = 1000(1 + i)^{24}$$
$$\tfrac{3000}{1000} = (1 + i)^{24}$$
$$3 = (1 + i)^{24}$$

$$\sqrt[24]{3} = \sqrt[24]{(1+\mathrm{i})^{24}}$$
$$3^{\frac{1}{24}} = 1 + i$$
$$1{,}046839 \approx 1 + i$$

$$1{,}046839 - 1 = i$$
$$i = 0{,}046839 \; ou \; 4{,}68\%$$

Exemplo numérico:
Em quanto tempo um capital de 1000 duplica de valor, considerando-se uma taxa de juros de 3% ao mês?

$$M = C(1+i)^n$$
$$2000 = 1000(1+0{,}03)^n$$
$$\frac{2000}{1000} = 1{,}03^n$$
$$\ln 2 = \ln 1{,}03^n$$
$$0{,}693147 \approx n \cdot \ln 1{,}03$$
$$0{,}693147 \approx n \cdot 0{,}029559$$
$$\frac{0{,}693147}{0{,}029559} \approx n$$
$$n \approx 23{,}45$$

Arrendondando para cima, temos:

$$n = 24 \; meses$$

3. Taxa Efetiva

Sempre que a frequência de capitalização coincidir com a frequência da taxa, dizemos que essa taxa é efetiva pois já indica exatamente o valor dos juros que serão adicionados ao capital. Por exemplo 12% ao ano, com capitalização anual é uma taxa efetiva.

Contudo, se a frequência de capitalização não coincide com a frequência da taxa (por exemplo 12% ao ano, com capitalização mensal), dizemos que essa taxa é nominal e não efetiva, pois ela não nos dá com precisão o valor dos juros que serão capitalizados.

Portanto, é necessário fazer alguns ajustes nas fórmulas de juros compostos quando estamos trabalhando com taxas nominais. Também é possível se transformar as taxas nominais em efetivas, assim sendo, pode-se utilizar as fórmulas convencionais de juros compostos.

O ajuste na fórmula do Montante (M) dos juros compostos, é conforme segue:

$$M = C\left(1+\frac{1}{k}\right)^{kn}$$

Onde:
k= número de capitalizações em 1 período da taxa nominal

Se a taxa nominal estiver no período anual e a capitalização for mensal, por exemplo, temos k = 12 capitalizações em 1 ano. O montante deve ser calculado assim:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12 \cdot n}$$

Se a taxa nominal estiver no período mensal e a capitalização for diária, temos k= 30 capitalizações em 1 mês. O montante deve ser calculado assim:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{30}\right)^{30 \cdot n}$$

Exemplo numérico:
Um banco emprestou a importância de 1.000 por 1 ano. Sabendo-se que o banco cobra 12% a.a. com capitalização mensal, calcule o montante devolvido ao final de 1 ano.

$$M = C\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{kn} = 1000\left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{12 \cdot 1}$$
$$M = 1000(1 + 0{,}01)^{12} = 1000 \cdot 1{,}01^{12}$$
$$M = 1000 \cdot 1{,}1268$$
$$M = 1.126{,}80$$

Para transformar a taxa nominal em efetiva, devemos igualar os montantes obtidos sobre o mesmo capital, aplicado pelo mesmo período de tempo, com base nessas duas taxas:

Por exemplo, transformar a taxa nominal de 12% ao ano com capitalização mensal, em efetiva:

$$C\left(1 + i_{ef}\right)^{n} = C\left(1 + \frac{i_{nom}}{k}\right)^{kn}$$
$$\left(1 + i_{ef}\right)^{n} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{k}\right)^{kn}$$
$$\left[\left(1 + i_{ef}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\left(1 + \frac{i_{nom}}{k}\right)^{kn}\right]^{\frac{1}{n}}$$
$$1 + \mathrm{i}_{\mathrm{ef}} = \left(1 + \frac{\mathrm{i}_{\mathrm{nom}}}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{k}}$$

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{k}\right)^{k} - 1$$

Onde:
i_{ef} = taxa efetiva;
i_{nom} = taxa nominal.

Exemplo numérico:
Transformar, em efetiva, a taxa nominal de 12% ao ano com capitalização mensal.

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{k}\right)^{k} - 1 = \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} - 1$$
$$i_{ef} = (1 + 0,01)^{12} - 1 = 1,01^{12} - 1$$
$$i_{ef} = 1,1268 - 1 = 0,1268$$
$$i_{ef} = 12,68\%$$

4. Capitalização Contínua

Sabemos que a fórmula da capitalização composta para um período discreto é:

$$\mathrm{M} = \mathrm{C}\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot n}$$

Onde:
M = montante final,
C = capital inicial,
i = taxa de juros nominal
n = tempo,
K = número de períodos de capitalização para um período da taxa nominal

Se a capitalização ocorrer um número infinitamente grande de vezes por período da taxa nominal, fazemos $k \rightarrow \infty$:

$$\mathrm{M} = \lim_{\mathrm{k} \to \infty} \left[\mathrm{C}\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot n}\right]$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{C} \cdot \lim_{\mathrm{n} \to \infty} \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{kn}}$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{C} \cdot \lim_{\mathrm{n} \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\mathrm{k/i}}\right)^{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{i} \cdot \mathrm{n}}$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{C} \cdot \lim_{\mathrm{n} \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\mathrm{k/i}}\right)^{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{i}}}\right]^{\mathrm{i} \cdot \mathrm{n}}$$
$$\mathrm{M} = \mathrm{C} \cdot \left[lim \left(1 + \frac{1}{k/i}\right)^{\frac{k}{i}}\right]^{in}$$

Pela definição do número de Euler (e):

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mathrm{x}}\right)^{\mathrm{x}} = \mathrm{e}$$

Então:

$$lim\left(1+\frac{1}{k/i}\right)^{\frac{k}{i}} = e$$

Substituindo na equação anterior, temos:

$$\mathrm{M} = \mathrm{C}\cdot[e]^{in}$$

Ou, simplesmente:

$$M = Ce^{in}$$

Exemplo numérico:
Qual o valor do montante obtido em uma aplicação de 1.000, taxa contínua de 10% ao ano, pelo prazo de 5 anos?

$$M = Ce^{in} = 1000\cdot e^{0{,}1\cdot 5}$$
$$M = 1.000\cdot e^{0{,}5}$$
$$M = 1.000\cdot 1{,}64872$$
$$M = 1.648{,}72$$

Exemplo numérico:
Qual o capital necessário para se obter um montante de 5.000 supondo uma taxa contínua de 2% ao mês pelo prazo de 24 meses?

$$M = Ce^{in}$$
$$5000 = C\cdot e^{0{,}02\cdot 24}$$
$$5000 = C\cdot e^{0{,}48}$$
$$5000 = C\cdot 1{,}616074$$
$$\frac{5000}{1{,}616074} = C$$
$$C \approx 3.093{,}92$$

Exemplo numérico:
Qual a taxa contínua necessária para se quadruplicar um capital aplicado por um período de 10 anos?

$$M = Ce^{in}$$
$$4C = Ce^{i\cdot 10}$$
$$4 = e^{10i}$$
$$\ln 4 = \ln e^{10i}$$
$$\ln 4 = 10i$$
$$1{,}386294 = 10i$$
$$\frac{1{,}386294}{10} = i$$

$i = 0{,}1386$ ou $i = 13{,}86\%$ ao ano.

Exemplo numérico:
Qual o prazo necessário para se triplicar um investimento efetuado a uma taxa contínua de 3% ao mês?

$$M = Ce^{in}$$
$$3C = Ce^{0{,}03\cdot n}$$
$$3 = \mathrm{e}^{0{,}03\cdot \mathrm{n}}$$
$$ln\,3 = ln\,e^{0{,}03n}$$
$$1{,}098612 = 0{,}03n$$

$$\frac{1{,}098612}{0{,}03} = n$$
$$n = 36{,}62$$

Ou, arredondando para cima:
n = 37 meses.

É possível transformar um taxa contínua em discreta, e vice-verso. Para isso, basta igualarmos os montantes produzidos em cada situação:

Capitalização Discreta:

$$M = \left(1 + \frac{d}{k}\right)^{kn}$$

Onde:
d = taxa de juros discreta

Capitalização Contínua:

$$M = Ce^{rn}$$

Onde:
r = taxa de juros contínua

Igualando as duas fórmulas, temos:

$$C\left(1 + \frac{d}{k}\right)^{kn} = \mathrm{C}e^{rn}$$
$$\left[\left(1 + \frac{d}{k}\right)^{kn}\right]^{\frac{1}{n}} = (e^{rn})^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(1+\frac{d}{k}\right)^{k} = e^{r}$$

Para transformar uma taxa discreta em contínua, devemos isolar o termo *r*:

$$ln\left(1+\frac{d}{k}\right)^{k} = ln\, e^{r}$$

$$r = ln\left(1+\frac{d}{k}\right)^{k}$$

$$r = k \ln\left(1+\frac{d}{k}\right)$$

Exemplo numérico:
Transformar uma taxa de 12% ao ano, capitalizada mensalmente em taxa contínua.

$$r = k \ln\left(1+\frac{d}{k}\right) = 12 \cdot ln\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)$$
$$r = 12 \ \cdot \ln(1+0{,}01)$$
$$r \ = \ 12 \ \cdot ln\, 1{,}01$$
$$r \ = \ 0{,}1194 = 11{,}94\%$$

Para transformar uma taxa contínua em discreta, temos que isolar o termo *d*.

$$\left(1+\frac{d}{k}\right)^{k} = e^{r}$$

$$\left[\left(1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{k}}\right)^{\mathrm{k}}\right]^{1/k} = (e^{r})^{1/k}$$

$$1+\frac{d}{k} = (e^{r})^{1/k}$$

$$\frac{d}{k} = e^{r/k} - 1$$

$$d = k\left(e^{r/k} - 1\right)$$

Exemplo numérico:
Transformar uma taxa de 12% ao ano contínua, em uma taxa anual com capitalização mensal.

$$d = k\left(e^{r/k} - 1\right)$$
$$d = 12\left(e^{0,12/12} - 1\right)$$
$$d = 12(e^{0,01} - 1)$$
$$d = 12(1{,}010050 - 1)$$
$$d = 0{,}1206 = 12{,}06\%$$

Uma aplicação muito utilizada da capitalização contínua é no cálculo do retorno de ações. O comportamento das ações aproxima mais de uma capitalização contínua do que discreta, já o processo de formação dos preços acontece praticamente em tempo real.

Por exemplo, supondo que uma ação é adquirida no dia anterior (*t – 1)* pelo preço P_{t-1} e depois é vendida no dia seguinte (t) pelo preço $P\_\{t\}$. Supondo capitalização contínua, o retorno (ou rentabilidade) obtido nessa operação pode ser calculada conforme segue.

Incialmente vamos reescrever a fórmula do montante com capitalização contínua. Faremos $M = P_t$, $C = P_{t-1}$ e n = 1 (pois nesse caso o prazo da operação é um dia). Vamos chamar a taxa de juros r de $R\_\{t\}$.

Então podemos reescrever:

$$M = Ce^{rn}$$

$$P_t = P_{t-1}e^{R_t \cdot (1)}$$

$$P_t = P_{t-1}e^{R_t}$$

Agora precisamos isolar o termo R_t para calcular o retorno contínuo da ação de um dia pro outro.

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = e^{R_t}$$

$$\ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = ln\, e^{R_t}$$

$$\ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = R_t$$

Ou

$$\mathrm{R_t} = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

Exemplo numérico:

Uma ação foi adquirida no dia 2/1 por 10,00. No dia seguinte (3/1), a ação foi vendida por 12,00. Qual o retorno contínuo dessa ação de um dia pro outro?

$$\mathrm{R_t} = \ln\frac{\mathrm{P_t}}{\mathrm{P_{t-1}}} = \ln\frac{12}{10}$$

$$R_t = \ln 1,2 = 0{,}1823 = 18{,}23\%$$

5. Séries de Pagamento

Nas operações financeiras, o capital pode ser pago ou recebido de uma única vez ou por meio de uma sequência de pagamentos ou recebimentos. Quando o objetivo é acumular um capital para o futuro, trata-se de um processo de **capitalização**. Por outro lado, quando a finalidade é quitar uma dívida, tem-se um processo de **amortização**.

As séries de pagamentos podem ser classificadas em dois grandes grupos: **certas (determinísticas)**, quando todos os parâmetros — como valor dos pagamentos, duração e taxa de juros — são fixos e previamente definidos, ou **aleatórias (probabilísticas)**, quando os valores e os vencimentos dos pagamentos seguem um comportamento incerto e podem ser modelados por variáveis aleatórias.

Além dessa distinção, as séries de pagamentos também podem ser categorizadas da seguinte forma:

a) **Quanto à periodicidade:**
Periódicas: os pagamentos ocorrem em intervalos regulares.
Não periódicas: os pagamentos ocorrem em intervalos irregulares.

b) **Quanto ao prazo:**
Temporárias: possuem duração limitada.
Infinitas: não possuem um número máximo de pagamentos.

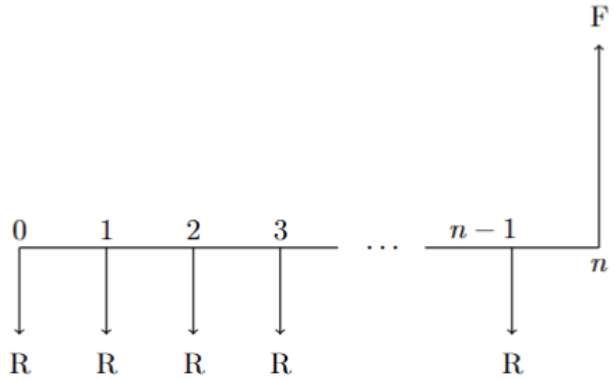
c) **Quanto ao valor dos termos:**
Constante (uniforme): todos os pagamentos têm o mesmo valor.
Variável: os valores dos pagamentos mudam ao longo do tempo.

d) **Quanto à forma de pagamento:**
Imediata: os pagamentos iniciam no primeiro período.
Diferida: o primeiro pagamento ocorre após um período de carência.

e) **Quanto ao momento dos pagamentos:**
Postecipadas (vencidas): os pagamentos são efetuados ao final de cada período.
Antecipadas: os pagamentos são realizados no início de cada período.

As **séries uniformes (ou anuidades)** correspondem àquelas em que os pagamentos ou recebimentos ocorrem em valores constantes e em intervalos regulares. Sua representação matemática pode ser expressa da seguinte forma:

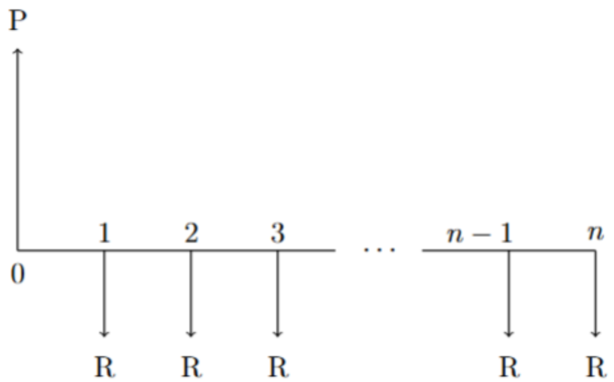
a) Na ótica do Investidor:



Onde:

R = pagamento periódico fixo
F = valor futuro ou montante

b) Na ótica do Tomador (do empréstimo) / Devedor:



Onde:

R = pagamento periódico fixo
P = valor presente ou principal

5.1 Valor futuro de uma anuidade postecipada

A anuidade postecipada consiste em ***n*** pagamentos *R*, realizados ao **final** de cada período, e sujeitos a uma taxa de juros i por período. No instante final, queremos determinar o montante acumulado *F*.

Os depósitos ocorrem nos tempos $\mathrm{t} = 1, 2, \dots, \mathrm{n}$, e cada um acumula juros até o tempo *n*:

- O primeiro pagamento *R* (feito no período 1) será capitalizado por *n−1* períodos, ou seja, seu valor futuro será $R(1+i)^{n-1}$.
- O segundo pagamento *R* (feito no período 2) será capitalizado por *n−2* períodos, e seu valor futuro será $R(1+i)^{n-2}$.

- O último pagamento *R* (feito no período *n*) **não será capitalizado**, pois é realizado no último instante. Seu valor futuro é simplesmente *R*.

Portanto, o valor futuro (F) é a soma dessas contribuições:

$$F = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \cdots + R(1+i)^1 + R(1+i)^0$$

Onde:

R = *valor do pagamento periódico;*
i = *taxa de juros por período;*
n = *número total de períodos.*

Simplificando, temos:

$$F = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}$$

A soma acima é uma progressão geométrica (P.G.) com:
- O primeiro termo $a = R$;
- A razão $q = 1 + i$;
- O número de termos é n.

Soma dos *n* termos de uma progressão geométrica (S_n):

Sabe-se que o termo geral de uma P.G. é:

$$a_n = aq^{n-1}$$

Onde:

a = primeiro termo da P.G.
q = razão da P.G.

Assim, podemos escrever a soma (S_n) dos *n* primeiros termos de uma P.G.:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

Multiplicando ambos os lados por *q*:

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n$$

Subtraindo as duas equações, temos:

$$S_n - qS_n = (a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}) - (aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n)$$

Cancelando os termos comuns:

$$S_n - qS_n = a - aq^n$$

Fatorando S_n no lado esquerdo:

$$S_n(1-q) = a(1-q^n)$$

Isolando S_n:

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

Multiplicando-se e dividindo-se a equação acima por *-1*, temos:

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}\cdot\frac{-1}{-1} = a\cdot\frac{-1+q^n}{-1+q}$$

Por fim, reorganizando os termos, temos:

$$S_n = a\frac{q^n-1}{q-1}$$

Agora, podemos aplicar essa fórmula para encontrar o valor futuro da anuidade:

$$F = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}$$

$$a = R$$

$$q = 1 + i$$

$$S_n = a\frac{q^n-1}{q-1} = R\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}$$

Por fim, podemos agora escrever a fórmula do valor presente de uma anuidade postecipada:

$$F = R\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Exemplo Numérico:
Você fará depósitos mensais de R$ 1.000,00 no final de cada mês durante 5 anos. A taxa de juros mensal é de 1% (ou 0,01). Calcule o valor futuro da anuidade após 5 anos.
Solução**:**

Pagamento periódico (R): R$ 1.000,00
Taxa de juros (i): 0,01 ao mês
Número de períodos (n): 5 anos = 5 x 12 = 6 meses.

$$F = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$F = 1000 \cdot \frac{(1+0.01)^{60} - 1}{0.01}$$

$$F = 1000 \cdot \frac{1.816697 - 1}{0.01}$$

$$F = 1000 \cdot 81.6697$$

$$F = 81.669{,}70$$

5.2 Valor presente de uma anuidade postecipada

O valor presente *P* será igual à soma dos valores presentes de todos os pagamentos *R* futuros. Ou seja, é a soma dos termos que representam o desconto de cada pagamento até o momento $t = 0$.

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Essa expressão representa a soma dos termos de uma Progressão Geométrica onde o termo inicial $a = \frac{R}{1+i}$ e a razão $q = \frac{1}{1+i}$.

Sabemos que a soma (S_n) dos termos de uma P.G. é igual a:

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Substituindo a e q, temos:

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1+i}\right) - 1}$$

Simplificando, temos:

$$\mathrm{S_n} = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1+i}\right) - 1}$$

$$= \frac{R}{1+i} \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{\frac{1-(1+i)}{1+i}}$$

$$= \frac{R}{1+i} \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{\frac{-i}{1+i}}$$

$$= \frac{R}{1+i} \cdot [(1+i)^{-n} - 1] \cdot \frac{1+i}{-i}$$

$$= R \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i}$$

Multiplicando e dividindo por -1, temos:

$$S_n = R \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i} \cdot \frac{-1}{-1}$$

$$S_n = \mathrm{R} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Por fim, podemos escrever a fórmula do valor presente de uma anuidade

$$\mathrm{P} = \mathrm{R} \cdot \frac{1 - (1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}$$

Exemplo numérico:
Suponha que um carro custa R$ 50.000,00 e será financiado em 48 parcelas mensais com uma taxa de 1% ao mês. O objetivo é calcular o valor da parcela (R).

$$P = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$R = \frac{P \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$R = \frac{50.000 \cdot 0{,}01}{1 - (1+0{,}01)^{-48}}$$

$$R = \frac{50.000 \cdot 0{,}01}{0{,}379740}$$

$$R = 1.316{,}69$$

5.3 Valor futuro de uma anuidade antecipada

Nesse caso os pagamentos ocorrem no início do período. A primeira parcela vai a valor futuro pelo período *n* completo. A segunda por *n-1*, e assim sucessivamente. A penúltima parcela capitaliza por 2 períodos e última por 1 período, como mostra a equação a seguir:

$$F = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + \cdots + R(1+i)^2 + R(1+i)^1$$

Reordenando, temos:

$$F = R(1+i)^1 + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n$$

Essa soma de termos em progressão geométrica, possui o 1º termo $a = R(1+i)$ e razão $q = 1+i$.

Substuindo na fórmula de S_n, temos:

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q-1} = R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1}$$

Por fim, a fórmula do valor futuro de uma anuidade antecipada:

$$F = R(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Ou, também pode ser escrito assim:

$$\mathrm{F} = R\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}$$

Exemplo Numérico:
*Uma pessoa decide investir **R$ 1.000,00** por mês em um plano de previdência privada com **depósitos no início de cada mês** (**anuidade antecipada**). O plano rende **1% ao mês**, e os aportes serão feitos por **30 anos**. Qual será o **valor futuro** acumulado?*

$$F = R\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}$$

$$F = 1.000 \cdot \frac{1{,}01^{361} - 1{,}01}{0{,}01}$$

$$F = 1000 \cdot 3529{,}913774$$

$$F = 3.529.913{,}77$$

5.4 Valor presente de uma anuidade antecipada

Semelhante ao valor presente de uma série postecipada, mas iniciando os pagamentos no início de cada período, podemos escrever assim:

$$P = \frac{R}{(1+i)^0} + \frac{R}{(1+i)^1} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}}$$

Simplificando:

$$P = R + \frac{R}{(1+i)^1} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}}$$

$$S_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1} = R \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1+i}\right) - 1}$$

Simplificando, temos:

$$S_n = R \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{\frac{1-(1+i)}{1+i}}$$

$$= R \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{\frac{-i}{1+i}}$$

$$= R \cdot [(1+i)^{-n} - 1] \cdot \frac{1+i}{-i}$$

$$= R(1+i) \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i}$$

Por fim, o valor presente de uma anuidade antecipada é:

$$P = R(1+i) \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i}$$

Exemplo numérico:
Vamos refazer o cálculo da prestação do carro de R$ 50.000,00 financiado em 48 parcelas mensais com taxa de 1% ao mês, agora com série antecipada.

$$P = R(1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$R = \frac{P \cdot i}{(1+i)[1-(1+i)^{-n}]}$$

$$R = \frac{50.000 \cdot 0{,}01}{(1+0{,}01)[1-(1+0{,}01)^{-48}]}$$

$$R = \frac{500}{0{,}383537}$$

$$R = 1.303{,}66$$

Referências

ASSAF NETO, A. **Matemática financeira e suas aplicações**. São Paulo: Atlas, 2008.

MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. **Matemática Financeira**. 4ed. São Paulo: Atlas, 2004.

WATSHAM, T.J.; PARRAMORE K. **Quantitative Methods in Finance**. London: Cengage, 1997.